

一种基于非线性扩散方程的 PET 重建方法

周 健 罗立民 朱宏擎

(东南大学生物医学工程系, 南京 210096)

摘 要 正电子发射断层重建是一类不适定问题,因此正则化方法常用来抑制噪声提高重建的质量。依据 Mumford-Shah 泛函模型提出了该类重建问题的统一变分模型。基于这一模型,提出了一种新的基于扩散方程的 PET 重建算法,同时给出了线性和非线性两种方法。实验结果表明,两种方法均有良好的重建性能,并且非线性方法通过合理的设置参数,能体现出较为优越的抗噪声性能和边缘保持特性。

关键词 正电子发射断层(PET) 重建 Mumford-Shah 泛函 扩散过程 非线性 正则化

中图法分类号: R817 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2006)02-0230-05

Regularized PET Image Reconstruction Method Using Nonlinear Diffusion Equations

ZHOU Jian, LUO Li-min, ZHU Hong-qing

(Department of Biology and Biomedical Engineering, Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract In PET image reconstruction, regularization methods are usually considered to suppress noise effects in reconstructed images. In this paper, the Mumford-Shah functional model was firstly investigated and the new variational framework for PET reconstruction was then proposed. The resultant linear diffusion equation based reconstruction method was derived accordingly. Based on this linear method, the new nonlinear diffusion method was also presented to provide more advantages for the image edge preservation. Simulation results suggest that both linear and nonlinear diffusion equations based methods have nice performance in final reconstructions. Also, results have verified that the nonlinear diffusion equation based reconstruction method is superior to the linear one in both noise smooth and edge preservation.

Keywords positron emission tomography (PET), reconstruction, Mumford-Shah functional, diffusion equation, nonlinear, regularization

1 引 言

随着技术的发展,正电子发射断层(PET)成像已成为肿瘤、心、脑疾病诊断与病理研究中不可缺少的重要方法。它能提供很多疾病在发展过程中的早期信息,可以提供超前诊断,尤其适合于肿瘤的早期诊断。

PET 重建算法也是国内外研究的热点之一。统计迭代法(statistical iterative algorithm, SIA)是应用较广的算法。其主要优势是将探测扫描过程中正电子所表现的一系列特有的统计物理特性(主要是

Poisson 统计特性)结合至图像重建问题当中,从而提高成像质量。Shepp 和 Vardi 首次提出了基于正电子 Poisson 统计特性的最大似然期望最大(maximum likelihood expectation-maximization, ML-EM)重建算法^[1],并由此开创了 SIA 重建算法的先河。

然而,投影重建问题是一经典的不适定问题且 PET 数据产生机制有别于 CT,使得 PET 观测投影数据的信噪比普遍较低。这样直接利用解析法或似然算法一般得不到满意的图像质量。因此正则化方法常用来抑制噪声,改善图像质量。图像 Gibbs 随机场(或 Markov 随机场)模型是运用较多的一类先验

基金项目:“973”国家重点基础研究发展计划项目(2003CB716102)

收稿日期:2004-11-08; 改回日期:2005-06-09

第一作者简介:周健(1978 -),男。现为东南大学生物医学工程系医学影像专业博士研究生。主要研究方向为医学图像重建、基于 PDE 的图像复原与分割。E-mail: zjseu@hotmail.com

模型,例如 OSL-MAP (one-step late maximum a posteriori) 算法^[2], 广义高斯场^[3], 以及 GEM (generalized EM) 模型^[4]。这类先验均在图像的局部领域上进行建模,并以此构造出不同的有利于保持图像信息的势能函数。

事实上,在重建中正则化方法不仅仅局限于施加图像局部信息来迫使重建达到预期的效果。例如全变分法^[5]、同时以区域平滑性以及区域边界曲线长度为约束的曲线进化法^[6-10]。值得注意的是后者所运用的即为经典 Mumford-Shah (MS) 图像先验模型^[11]。解决这类问题目前流行的方法是变分 PDE (partial differential equation) 方法。

基于 MS 模型,提出了一种新的适用于 PET 重建的变分框架结构,并由此导出具有线性和非线性扩散 PDE 的重建方法。

2 算法理论

2.1 MS 模型及相关技术回顾

MS 泛函模型是目前较为流行的图像分割轮廓提取技术,在理论上它属于一类具有低维测度及体积的能量变分问题。其能量泛函的一般形式可表示为:

$$E(f, \Gamma) = \alpha \int_{\Omega} |f - f_0|^2 d\Omega + \beta \int_{\partial r} |\nabla f|^2 d\Omega + \gamma \int_{\Gamma} d\Gamma \quad (1)$$

其中, f 为定义于开集 Ω 上分片光滑图像且闭集 $\Gamma \in \mathbf{R}^2$ 为其边缘曲线(不连续集); f_0 为观测图像。需要求解能量泛函式(1)关于 f 以及 Γ 的最小解:

$$\{\hat{f}, \hat{\Gamma}\} = \inf_{f, \Gamma} \{E(f, \Gamma)\}$$

其结果可以同时恢复出图像及其相应的边界曲线。

式(1)的第 1 项为保真项,它用于衡量所求图像 f 与观测图像 f_0 之间的逼近程度;第 2、3 项均为正则项:第 2 项用于控制图像的平滑度,第 3 项则用于惩罚区域边界曲线的弧长。参数 α 、 β 和 γ 用于协调各项之间的相互关系。

对于断层重建问题,可以直接对第 1 项进行扩展代之以新的保真项:

$$E_{\psi}(f, \Gamma) = \alpha \int_{\Omega} \psi(y, Af)^2 d\varphi + \beta \int_{\partial r} |\nabla f|^2 d\Omega + \gamma \int_{\Gamma} d\Gamma \quad (2)$$

其中, y 为观测投影,投影算子 $A: \Omega \mapsto \Phi$ (Radon 变

换), Φ 为其值域。式(2)给出了较为一般的基于 MS 模型的断层重建能量变分框架。在保真项中,距离函数 ψ 可以根据需要进行选取,以反映观测投影与前向投影直接的贴近程度。

式(2)中右边第 2、3 项可以作取舍以得到不同的近似 MS 模型,例如对于 $\beta = 0$ 情形,已进行了研究并给出了曲线演化算法^[6-9]。然而曲线演化法的不足之处在于实现较为复杂,许多方法对初始曲线的选取敏感。下面将讨论 $\gamma = 0$ 的情形(为了简化问题取 $\alpha = 1$),它将得到一类有价值的基于扩散方程的重建方法。

2.2 算法基本描述

基于 PET 重建的统计模型,可以假定:每一符合线上所观测到的光子数是满足独立同分布的 Poisson 随机变量:

$$[y]_i \sim \text{Poisson}\{[Af + r]_i\} \quad (3)$$

其中, $[F]_i$ 表示 F 的第 i 个采样值, A 为上述的投影算子,此处即为系统概率矩阵,其任意内部元素 a_{ij} 则表示第 j 个像素点被第 i 个探测器所探测到的概率, r 为附加至每根符合线上的背景 Poisson 噪声均值。根据 Poisson 分布的定义,得到:

$$P(Y = y) = \prod_i \exp\{-[Af + r]_i\} \frac{[Af + r]_i^{y_i}}{y_i!} \quad (4)$$

两边取对数整理后得到对数似然函数

$$L(f) = \sum_i \{-[Af + r]_i + [y]_i \log[Af + r]_i\} \quad (5)$$

基于最大似然法的 PET 断层重建即是求解式(5)关于 $f(f > 0)$ 的最大值:

$$\hat{f} = \arg \max_{f > 0} \{L(f)\} \quad (6)$$

利用最小交叉熵的思想将式(6)的求解等价地转换为最小化投影与近似投影之间的 Kullback-Leibler 距离:

$$\arg \max_{f > 0} L(f) = \arg \min_{f > 0} KL(y, Af + r) \quad (7)$$

于是式(2)中 ψ 取 KL 距离函数并离散化,将第 1 项保真项记为 $E_1(f)$,第 2 项为 $E_2(f)$ 并取 $\gamma = 0$,可得如下的能量泛函:

$$\begin{aligned} J(f) &= E_1(f) + E_2(f) \\ &= KL(y, Af) + \beta \int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega \\ &= \sum_i \{[Af + r]_i - [y]_i \log[Af + r]_i\} + \beta \int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

目的即为求解泛函 $J(f)$ 关于 f 的最小值:

$$\hat{f} = \inf_{f>0} J(f) \quad (9)$$

2.3 扩散方程求解

式(8)的最小化问题可以通过两种途径解决:一是通过离散化 $E_2(f)$, (例如,可以参考 Penin 对总变分的近似离散格式^[5]), 然后利用按线搜索的方式逐个进行求解;二是通过变分法,即找出 $J(f)$ 关于泛函 f 能量梯度用最速下降法解决。这里采用后者:首先将 $E_1(f)$ 对 f 求变分得到:

$$\frac{\delta E_1(f)}{\delta f} = A^* \left(1 - \frac{y}{Af+r} \right) \quad (10)$$

其中, A^* 为 A 的偶算子。对 $E_2(f)$ 求变分可得到:

$$\frac{\delta E_2(f)}{\delta f} = -\beta \nabla^2 f \quad (11)$$

以及 Neumann 边界条件:

$$\frac{\partial f}{\partial N} = 0 \quad (12)$$

其中, ∇^2 为 Laplacian 算子, N 为 Ω 的边界单位外法向量。由式(9)和式(10), 得到:

$$\frac{dE(f)}{df} = \frac{\delta E_1(f)}{\delta f} + \frac{\delta E_2(f)}{\delta f} \quad (13)$$

若令图像是关于时间的函数 $f: f(x, y, t)$, 以能量梯度式(12)构造如下抛物型 PDE:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{dE}{df} = -A^* \left(1 - \frac{y}{Af+r} \right) + \beta \nabla^2 f \quad (14)$$

方程式(14)为一类典型的线性扩散方程, 具有类似热传导的性质, 此时 β 的物理意义为扩散系数或传导系数。将式(14)按时间进行差分, 得到时间进化方程:

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} + \Delta t \left[-A^* \left(1 - \frac{y}{Af^{(n)}+r} \right) + \beta D(f^{(n)}) \right] \quad (15)$$

其中, f 表示离散图像, 矩阵 A 对应于投影算子, n 为当前迭代次数; $D(f^{(n)})$ 表示式(14)中的右边第 2 项离散形式; Δt 为时间步长。

式(15)即为线性扩散重建方法。该方法与一般的 SIA (例如 EM 算法) 相比, 最大的区别在于式(15)为加性迭代; 再次, 式(15)一次可以对图像所有像素进行同时处理, 故而易于运算; 另外, 它与 RAMLA (row-action maximum likelihood algorithm) 有着较为相似是迭代形式^[12], 因而可以引入适当的超松弛因子加快收敛。然而该方法的不足在于由方程式(14)确定的线性前项热扩散方程, 其 Laplacian 算

子 ∇^2 等效为频域中的低通滤波器 (注意通常意义下的高通 Laplacian 滤波器为 ∇^2 取负。若式(14)右边第 2 项取负则变为后项扩散过程, 在物理上属于热传导的反求方程, 是经典的不适定问题), 它有着很强的平滑功能, 且 Laplacian 算子的齐次性不利于保持图像的边缘特征。

在这种情况下, Perona 和 Malik 建议采用非线性性的处理方法^[13]。将正项 $\beta \nabla^2 f$ 做如下处理:

$$\beta \nabla^2 f = \nabla \cdot (\beta \nabla f) \quad (16)$$

将 β 替换为与图像边缘有关的函数 $\beta(f)$, 可得到新的具有非线性扩散 (也称异质扩散) 方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -A^* \left(1 - \frac{y}{Af+r} \right) + \nabla \cdot (\beta(f) \nabla f) \quad (17)$$

于是非线性扩散的重建方法可以表示为

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} + \Delta t \cdot \left[-A^* \left(1 - \frac{y}{Af^{(n)}+r} \right) + D_\beta(f^{(n)}) \right] \quad (18)$$

其中, $D_\beta(f^{(n)})$ 表示式(17)右边第 2 项的离散化形式, 它与 β 函数有关。

Perona 和 Malik 给出了两种不同的传导系数函数^[13]。Black 等人研究了传导函数的选取并提出比较稳健的异向扩散方法^[14], Weeratunga 和 Kamath 等人则比较了最常用的几种传导函数^[15], 并指出基于扩散过程的图像增强关键在于边缘阈值参数的选取。因此, 在此处不强调运用哪种传导函数。实验中只选取 Perona 和 Malik 提出的其中一种:

$$\beta(f) = \exp \left\{ - \left(\frac{|\nabla f|}{K} \right)^2 \right\} \quad (19)$$

其中, 常数 K 是与当前图像边缘强度有关的阈值。通常情况下, 图像平滑处梯度变化较缓慢, 此时期望 K 值较大, 以达到充分平滑; 而在图像边缘处对应梯度变化较强, 此时 K 值可以适当变小以保留该边缘。实际运用时, 可参考 Canny 提出的方法即取图像绝对值梯度模方差的 90% 的值作为 K 值^[13]。理论上讲, K 值选取越大则对应的函数 β 取值则越趋于 1, 于是, 式(17)则接近线性扩散方程, 不利于边缘保持; K 值越小则情况相反。

3 实验仿真

3.1 数据描述

实验中, 线性和非线性重建算法将分别运用于仿真数据与实际临床数据。仿真用的脑部模板 (如



图 1 脑部模板

Fig. 1 Brain phantom

图 1 所示)背景与组织光子浓度比设为 0.1:1.0,并模拟进行 1 小时的 PET 扫描,其所得真实符合数均值约为 10^6 , Poisson 背景噪声均值设为总均值的 15%,观测数据以 32 个方向(等间隔,分布在 180° 内)进行采集,每个投影包含 128 个投影点,相邻符合线间隔为单位 1。重建图像大小均为 128×128 。

临床数据采集自 CT/PET 扫描仪。该机器可以同时进行 CT 与 PET 成像,对一个断层进行 192 个方向进行投影,每个投影具有 192 个采样点,完成一次全身扫描可采集获得 175 个切片。重建切片有 128×128 像素,像素间实际距离为 3.375mm。

3.2 评估方法

对于仿真数据,将新的算法与(滤波反投影法)FBP,ML-EM 进行了比较。在进行非线性扩散重建中,采用 Canny 的方法选取边缘阈值。对算法的评估主要在图像的重建质量上,故引入均方误差(MSE),其定义为

$$MSE(n) = \frac{\sum_j (f_j^* - f_j)^2}{\sum_j (f_j^*)^2} \times 100\% \quad (20)$$

其中, f^* 表示原始图像。实际数据由于缺少真实的参考对象,不能直接进行图像间 MSE 分析,此时可从视觉角度上进行衡量图像质量。

3.3 重建结果及分析

SIA 算法均进行了 30 次迭代,其中线性扩散重建中传导系数取 $\beta = 0.3$;另外,扩散重建中时间步长不易取过大,应满足 CFL 差分稳定性条件,此处取 0.1。

图 2 为脑部模板的重建结果。从结果中可以很清楚地观察到 FBP 的条纹状噪声(图 2(a))。而 ML-EM(图 2(b))由于未考虑正则项,经过 30 次迭代,噪声已相当明显;线性扩散重建图像(图 2(c))较光滑,但边缘信息不明显;而非线性扩散(图 2(d))在平滑图像的同时又保持了丰富的边缘特征。

图 3 给出了 MSE 误差分析曲线。从中得到相同的结果即非线性扩散重建误差较小。然而同时也越,其主

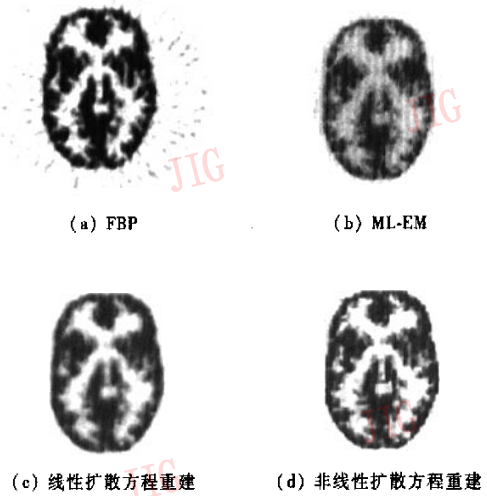


图 2 脑部仿真模板重建结果

Fig. 2 Reconstructions of brain phantom

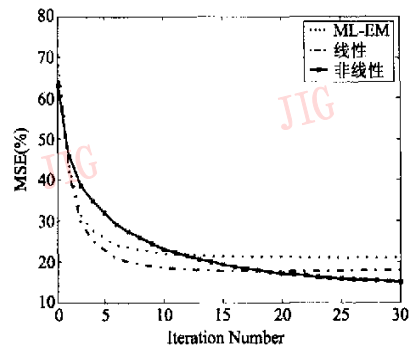
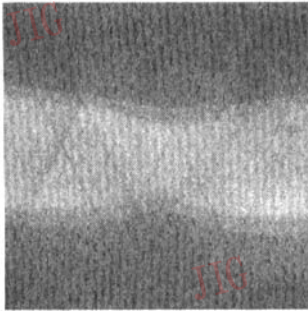


图 3 MSE 误差分析曲线

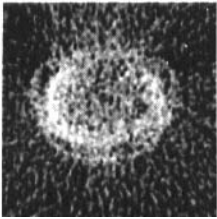
Fig. 3 Comparison of MSE

要原因可能在于前期迭代边缘阈值未能达到最佳值。

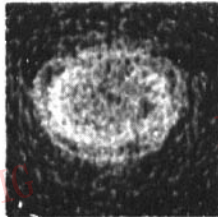
发现在迭代前期非线性算法并不比线性与 ML 优图 4 给出了临床数据的重建结果。其中,图 4(a)为真实的投影数据,由于采集时间较短(采用放射性同位数 F^{18} ,采集时间大约 140s)因而信噪比较低,从图中也可以看出噪声较为明显。图 4(b)为 FBP 重建结果。显然,解析法对低信噪比的投影数据进行重建的结果并不理想。ML-EM 重建结果较 FBP 优越,这可以通过比较图 4(c)与图 4(b)得知。图 4(d)和图 4(e)则分别给出了线性与非线性扩散方程重建结果。线性扩散重建已显示出较好地抑制噪声的效果(此处仍然取 $\beta = 0.3$)。而非线性扩散方法在抑制噪声的同时又保持了较强的边缘特征,更利于临床诊断。



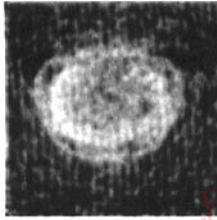
(a) 临床投影数据



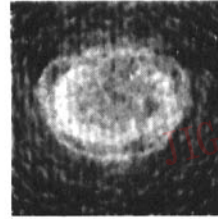
(b) FBP



(c) ML-EM 重建结果



(d) 线性扩散方程重建



(e) 非线性扩散方程重建

图 4 临床数据重建结果

Fig. 4 Reconstructions of clinical projection data

4 结 论

给出了一种基于扩散方程的 PET 正则化重建方法,同时又将其分为线性扩散和非线性扩散两个类别。实验结果表明,两种扩散重建的方法都有着较为理想的重建效果,而非线性扩散重建除有较强的平滑去噪能力外,还具有良好的边缘保持的特性。然而算法中仍存在一些不足之处,例如,在迭代初期,边缘阈值的自适应性较弱,不能体现出非线性扩散重建的优势,因此,在后续的工作中,将集中研究这一问题,以获取更为合理的自适应阈值方法。

参考文献 (References)

1 Shepp L A, Vardi Y. Maximum likelihood reconstruction for emission

tomography [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1982, 2(1): 113 ~ 122.

2 Green P J. Bayesian reconstructions from emission tomography data using a modified EM algorithm [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1990, 9(1): 84 ~ 93.

3 Bouman C A, Sauer K. A generalized gaussian image model for edge-preserving MAP estimation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1993, 2(3): 296 ~ 310.

4 Hebert T, Leahy R. A generalized EM algorithm for 3-D Bayesian reconstruction from Poisson data using Gibbs priors [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1989, 8(2): 194 ~ 202.

5 Panin V Y, Zeng G L, Gullberg G T, et al. Total variation regulated EM algorithm for SPECT reconstruction [J]. IEEE Transactions on Nuclear Science, 1999, 46(6): 2202 ~ 2210.

6 Elangovan V, Whitaker R T. From sinograms to surfaces: A direct approach to the segmentation of tomographic data [A]. In: Proceedings of International Conference on Medical Image Computing and Computer Assisted Interventions (MICCAI) [C], Utrecht, Netherlands, 2001, 2208: 213 ~ 223.

7 Bruandet J P, Peyrin F, Dinten J M, et al. Binary objects tomographic reconstruction from few noisy X-ray radiographs using a region based curve evolution method [A]. In: Proceedings of the 2001 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record [C], San Diego, USA, 2001, 3: 1717 ~ 1719.

8 Ye J C, Bresler Y, Moulin P. A self-referencing level-set method for image reconstruction from sparse Fourier samples [J]. International Journal of Computer Vision, 2002, 50(3): 253 ~ 270.

9 Alvino C V, Yezzi Jr. A J. Tomographic reconstruction of piecewise smooth images [A]. In: Proceedings of the 2004 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition [C]. Washington, USA, 2004: 576 ~ 581.

10 Yu D F, Fessler J A. Edge-preserving tomographic reconstruction with nonlocal regularization [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2002, 21(2): 159 ~ 173.

11 Mumford D, Shah J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems [J]. Communication on Pure Application Mathematics, 1989, 42(1): 577 ~ 685.

12 Browne J, De Pierro A. A row-action alternative to the EM algorithm for maximizing likelihoods in emission tomography [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1996, 15(5): 687 ~ 699.

13 Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629 ~ 639.

14 Black M J, Sapiro G, Marimont D H, et al. Robust anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 421 ~ 432.

15 Weeratunga S K, Kamath C. PDE-based non-linear diffusion techniques for denoising scientific and industrial images: an empirical study [A]. In: Proceedings of Image Processing: Algorithms and Systems Conference (SPIE) [C], San Jose, California, USA, 2002: 19 ~ 24.